Références :
Analyse fonctionnelle, Haïm Brezis
Soit H un espace de Hilbert.

Théo. *Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors, pour tout $f \in H$, il existe $u \in K$ unique tel que*

$$||f-u|| = \min_{v\in K} ||f-v||.$$

De plus, u est caractérisé par la propriété

(i) $u \in K$

(ii) $Re(< f-u, v-u >) \leq 0$ *pour tout* $v \in K$.

On note $p_K(f)$ la projection de f sur K.

Démonstration. • Existence

Soit $v_n \in K$ telle que

$$\underbrace{||f-v_n||}_{d_n} \underset{n\to\infty}{\to} \underbrace{\inf_{v\in K} ||f-v||}_{d}.$$

Montrons que (v_n) est de Cauchy. On utilise l'identité du parallélogramme pour $x = f - v_n$ et pour $y = f - v_m$, on a

$$||2f-v_n-v_m||^2 + ||v_m-v_n||^2 = 2(||f-v_n||^2 + ||f-v_m||^2) = 2(d_n^2 + d_m^2).$$

On a donc

$$||f - \underbrace{\frac{v_n+v_m}{2}}_{\in K}||^2 + \frac{1}{4}||v_m - v_n||^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Par définition de d, on a

$$\left|\left| f - \frac{v_n+v_m}{2} \right|\right| \geq d.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{4}||v_m - v_n||^2 \leq \underbrace{\frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2)}_{\underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} d^2} - d^2.$$

On obtient donc

$$||v_m - v_n|| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, la suite (v_n) est de Cauchy dans K complet en tant que fermé d'un espace complet. Ainsi, la suite converge dans K et on a bien le résultat.

(ii) Caractérisation de u.
Soit $u \in K$ vérifiant

$$||f-u|| = \min_{v\in K} ||f-v||$$

et soit $w \in K$. On a, pour tout $t \in]0,1]$

$$v = (1-t)u + tw \in K$$

et donc

$$||f-u|| \leq ||f - ((1-t)u + tw)|| = ||(f-u) - t(w-u)||$$

On a donc

$$\begin{aligned}
||f-u||^2 &\leq < (f-u) - t(w-u), (f-u) - t(w-u) > \\
&\leq ||f-u||^2 - t(< f-u, w-u > + < w-u, f-u >) + t^2||w-u||^2 \\
&\leq ||f-u||^2 - t(< f-u, w-u > + \overline{< f-u, w-u >}) + t^2||w-u||^2 \\
&\leq ||f-u||^2 - 2t\mathrm{Re}(< f-u, w-u >) + t^2||w-u||^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$2\mathrm{Re}(< f-u, w-u >) \leq t||w-u||^2.$$

On obtient le résultat en faisant tendre t vers 0.
Soit, maintenant, $u \in K$ tel que $\mathrm{Re}(< f-u, v-u >) \leq 0$ pour

tout $v \in K$. Alors, pour tout $v \in K$,

$$\begin{aligned} ||u-f||^2 - ||v-f||^2 &= ||u||^2 + 2\mathrm{Re}(< v-u, f >) - ||v||^2 \\ &= ||u||^2 + 2\mathrm{Re}(< f, v-u >) - ||v||^2 \\ &= ||u||^2 + 2\mathrm{Re}(< f-u, v-u >) \\ &+ 2\mathrm{Re}(< v-u, u >) - ||v||^2 \\ &= ||u||^2 - ||v||^2 + 2\mathrm{Re}(< f-u, v-u >) \\ &+ 2\mathrm{Re}(< v, u >) - 2||u||^2 \\ &= 2\mathrm{Re}(< f-u, v-u >) - ||u-v||^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- Unicité
  Soit $u_1, u_2 \in K$ tels que
  - $\mathrm{Re}(< f-u_1, v-u_1 >) \leq 0$ pour tout $v \in K$
  - $\mathrm{Re}(< f-u_2, v-u_2 >) \leq 0$ pour tout $v \in K$

  Si on remplace v par u_2 dans la première inégalité et par u_1 dans la deuxième, on obtient
  - $\mathrm{Re}(< f-u_1, u_2-u_1 >) \leq 0$
  - $\mathrm{Re}(< f-u_2, u_1-u_2 >) \leq 0$

  En additionnant ces deux inégalités, on obtient,

$$\begin{aligned} & \mathrm{Re}(< f-u_1, u_2-u_1 >) + \mathrm{Re}(< f-u_2, u_1-u_2 >) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(< f-u_1, u_2-u_1 >) + \mathrm{Re}(< u_2-f, u_2-u_1 >) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(< f-u_1, u_2-u_1 > + < u_2-f, u_2-u_1 >) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(< f-u_1+u_2-f, u_2-u_1 >) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(||u_2-u_1||^2) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & ||u_2-u_1||^2 \leq 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, on a donc $u_1 = u_2$.

$\square$

Prop. *On a, pour tout $f_1, f_2 \in H$,*

$$||P_k f_1 - P_k f_2|| \leq ||f_1 - f_2||.$$

Démonstration. Soit $f_1, f_2 \in H$. Posons $u_1 = P_K f_1$ et $u_2 = P_K f_2$, on a alors, par le théorème qui précède, pour tout $v \in K$,

- $\mathrm{Re}(< f_1-u_1, v-u_1 >) \leq 0$
- $\mathrm{Re}(< f_2-u_2, v-u_2 >) \leq 0$

En prenant $v = u_2$ dans la première inégalité et $v = u_1$ dans la deuxième, on obtient :

- $\mathrm{Re}(< f_1-u_1, u_2-u_1 >) \leq 0$
- $\mathrm{Re}(< f_2-u_2, u_1-u_2 >) \leq 0$

En additionnant les deux inégalités, il vient

$$\begin{aligned} & \mathrm{Re}(< f_1-u_1, u_2-u_1 >) + \mathrm{Re}(< f_2-u_2, u_1-u_2 >) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(< f_1-u_1, u_2-u_1 > + < f_2-u_2, u_1-u_2 >) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(< f_1-u_1, u_2-u_1 > + < u_2-f_2, u_2-u_1 >) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(< f_1-u_1+u_2-f_2, u_2-u_1 >) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Re}(< u_2-u_1, u_2-u_1 >) \leq \mathrm{Re}(< f_1-f_2, u_1-u_2 >) \\ \Leftrightarrow\ & ||u_1-u_2||^2 \leq \mathrm{Re}(< f_1-f_2, u_1-u_2 >) \end{aligned}$$

Or, par Cauchy Schwarz,

$$< f_1-f_2, u_1-u_2 > \leq ||f_1-f_2|| ||u_1-u_2||.$$

Ainsi, on obtient le résultat. $\square$

Leçons possibles : 205 - 213 - 253